1. **Матрица оператора**

Матрица А оператора *А* – это квадратная матрица, размер которой равен размерности пространства. Строится она следущим образом:

* в пространстве выбирается базис *е*1, *е* 2 , *е* 3, ... е*n*
* вычисляется действие оператора на каждый базисный вектор: *Ае*1, *Ае*2 , *Ае*3, ... *Аеn*
* для каждого из векторов *Ае*1, *Ае* 2 , *Ае* 3, ... *Аеn* находится его координатный столбец в базисе *е*1, *е* 2 , *е* 3, ... е*n*: *Ае*1= a11 *е*1 + a21*е* 2 + a31*е* 3 + ...+ a*n*1е*n*, ... *Ае**n*= a1*n е*1 + a2*nе* 2 + a3*nе* 3 + ...+ a*nn*е*n*
* из полученных столбцов (в том порядке, в котором они располагаются в базисе) формируется матрица .

После того, как матрица построена, координатный столбец Y образа любого вектора *x = x*1*е* 1 + *x*2*е*2 +… *x*n*еn* пространства находится по формуле

**Y =AX**, где **(1.1).**

**Важно: если меняется базис, меняется и матрица оператора!**

Связь следующая: если С – матрица перехода от старого базиса к новому, Аст – матрица оператора в старом базисе, Ан – матрица оператора в новом базисе, то

**Ан= С-1 Аст С (1.2).**

**Пример.** *Пусть оператор А действует в R3, где выбран декартов базис* ***i****,* ***j****,* ***k****. Оператор каждому вектору* ***х*** *сопоставляет векторное произведение* ***а****×****х****., где . Найти матрицу оператора в заданном базисе, а также в базисе из векторов.*

1. Найдем матрицу оператора в базисе ***i****,* ***j****,* ***k***.

, , , итак, матрица оператора в базисе ***i****,* ***j****,* ***k*** имеет вид

1. Найдем матрицу оператора в базисе *е*1, *е* 2 , *е* 3.

, , , итак, матрица оператора в базисе ***i****,* ***j****,* ***k*** имеет вид  **Обратите внимание: образы векторов *е*1, *е* 2 , *е* 3 мы должны представить как линейные комбинации этих же самых векторов!**

1. Матрицу оператора в базисе *е*1, *е* 2 , *е* 3 можно было искать и с помощью формулы 1.2. В этом случае матрица :

=.

Обратите внимание: в отличие от базиса ***i****,* ***j****,* ***k***, базис *е*1, *е* 2 , *е* 3 «привязан» к действию оператора: вектора, коллинеарные *е*1, оператором переводятся в 0, а вектора, лежащие плоскости, ортогональной *е*1, под действием оператора переходят в ортогональные им вектора той же плоскости (в частности, образ *е*2 коллинеарен *е*3 и наоборот, образ *е*3 коллинеарен *е*2).

1. **Инвариантные подпространства**

Выбор базиса, который наилучшим образом согласован с действием оператора, – это важная задача. Одно из главных средств ее решения – представление пространства в виде прямой суммы инвариантных подпространств.

**Определение.** Подпространство U линейного пространства L называется инвариантным относительно действия оператораA, если .

По-простому это означает, что действие оператора на подространстве не выводит за пределы . В частности, это означает, что рассматривая действие оператора на подпространстве, можно «забыть» о том, что этот оператор действует и за пределами , и рассматривать только действие оператора на. Такое ограничение называется сужением оператора на.

Например, для оператора ортогонального проектирования на плоскость в пространстве *R3* инвариантными подпространствами являются плоскость, на которую осуществляется проектирование, любая прямая в этой плоскости, проходящая через начало координат, прямая, перпендикулярная этой плоскости (нормаль) и любая плоскость, проходящая через нормаль.

Для любого оператора инвариантными обязательно являются нулевое подпространство и полное пространство. Такие два пространства называют тривиальными и из рассмотрений, как правило, исключают.

Важны следующие две теоремы:

**Теорема 2.1.** Если подпространство U конечномерного пространства L инвариантно относительно опрератора и имеет размерность k, то можно выбрать базис в пространстве L, в котором матрица оператора будет иметь вид где и – квадратные матрицы размеров k и n – k соответственно, а все элементы нижнего левого блока матрицы равны 0.

**Замечания:** 1) это означает, что первые k элементов базиса пространства L образуют базис U, и – матрица сужения оператора на U в этом базисе,

2) матрицы вида называют блочно-треугольными,

3) верно и обратное утверждение: если матрица оператора – блочно-треугольная с квадратным верхним блоком размера k, то линейная оболочка первых k базисных векторов является инвариантным подпространством.

**Теорема 2.2.** Если пространство является прямой суммой двух инвариантных подпространств, то можно выбрать базис, в котором матрица опрератора имеет вид , где и – квадратные блоки, размеры которых равны размерностям прямых слагаемых.

Замечание: матрица имеет такой вид, если базис пространства получен как объединение базисов подпространств, которые являются его прямыми слагаемыми (напомним, что базис прямой суммы может быть получен объединением базисов слагаемых).

**Важное замечание:** над полем комплексных чисел каждый многочлен имеет хотя бы один корень, следовательно, каждый оператор имеет хотя бы один собственный вектор. Для операторов над полем вещественных чисел это неверно (не каждый многочлен имеет вещественные корни), но можно доказать, что каждый оператор над полем вещественных чисел имеет хотя бы одно инвариантное подпространство размерности не выше 2.

1. **Собственные вектора, собственные числа, характеристический многочлен**

Простейшее инвариантное подпространство – одномерное, то есть линейная оболочка одного ненулевого вектора. Соответствено, если *e* – базис одномерного инвариантного относительно действия оператора *A*, то *Ae=λe*, где *λ* – некоторое число.

**Определение 3.1.** Ненулевой вектор *x* называется собственным вектором опрератора *A*, если существует скаляр *λ*, для которого справедливо равенство*Ax=λx*.

Скаляр *λ* называется собственным числом оператора *A*, отвечающим собственному вектору *x*.

Справедлива следующая важная теорема.

**Теорема 3.1.** Скаляр является собственным числом оператора с матрицей тогда и только тогда, когда он является корнем многочлена .

**Замечания:**

**1)**Многочлен имеет степень, равную размерности пространства, в котором действует оператор, и, хотя и определяется через матрицу оператора, но не зависит от выбора базиса (напомним, что матрица от выбора базиса зависит, но если мы выберем другой базис и получим другую матрицу, характеристический многочлен при этом не изменится).

**2)** Теорема 3.1 показывает путь вычисления собственных чисел и собственных векторов: надо

А) найти корни

Б) для каждого корня решить систему линейных уравнени (. Так как определитель матрицы равен 0, система обязана иметь ненулевые решения (возможно, она имеет несколько линейно независимых решений, но хотя бы одно такое решение должно быть обязательно).

**3)** Количество линейно независимых решений системы ( называется геометрической кратностью собственного числа, а кратность этого числа как корня характеристического многочлена называется алгебраической кратностью. Можно показать, что геометрическая кратность не может быть больше алгебраической, но может быть меньше.

**Теорема 3.2.** Собственные вектора данного оператора, отвечающие различным собственным числам, линейно независимы.

**Следствие.** Если характеристический многочлен оператора раскладывается на различные линейные множители, то в пространстве существует базис из собственных векторов этого оператора.

Как выглядит матрица оператора в базисе из собственных векторов *е*1, *е* 2 , *е* 3, ... е*n*? Для каждого из этих векторов справедливо равенство *Aei=**λiei*. Значит, вектору в этом базисе отвечает координатный столбец, в котором на i-м месте стоит собственное число *λi*, а все остальные элементы равны 0. Ясно, что матрица, составленная из этих столбцов, является диагональной с числами, *λ*2, ..., *λn* на диагонали (именно в таком порядке).

**Определение 3.2.** Если в пространстве существует базис, в котором матрица оператора является диагональной, оператор называется диагонализуемым.

***Мы показали, что если в пространстве есть базис из собственных векторов оператора, то оператор диагонализуем. Легко проверить и обратное: если оператор диагонализуем, то существует базис из собственных векторов этого оператора.***

Рассмотрим примеры.

1. , для вычисления характеристического многочлена вычтем из каждого элеменаа главной диагонали переменную *λ*и вычислим определительполученной матрицы: .

Итак, собственные числа нашего опрератора все различны: – 1 , 2, 5, значит, отвечающие им собственные вектора в количестве 3 штук линейно независимы и образуют базис. Остается их найти. Для этого мы решаем 3 системы однородных линейных уравнений.

А) – 1, тогда А – Е = А + Е =, таким образом, решение этой стстемы имеет размерность 1 (так как ранг матрицы равен 2), и в качестве такого решения можно выбрать вектор .

Аналогично разбираемся с двумя другими собственными числами.

Б) 2, , ,

В) 5, , .

Легко проверить, что все 3 полученных вектора линейно независимы и образуют базис основного пространства. Матрица оператора в базисе *е*1, *е* 2 , *е* 3 имеет вид .

1. в этом случае характеристический многочлен равен .

В этом случае мы видим кратный корень характеристического многочлена: имеет кратность 2, и 5 имеет кратность 1.

Когда мы ищем собственные числа , отвечающие собственному числу – 1, получаем систему с матрицей А + Е = Эта матрица имеет ранг 2, следовательно, пространство решений имеет размерность 3 – 2 = 1, и базиса из собственных векторов нам пстроить не удастся (оставшееся собственное число 5 даст на ровно один собственный вектор, значит, более двух независимых собственных векторов нам не получить). Итак, оператор не диагонализуем, у него только два линейно независимых собственных вектора: *е*1=, который является решением рассмотренной системы, и *е*2 – решение следующей системы:

А 5Е =, то есть *е*2=.

1. , в этом случае характеристический многочлен такой же, как и в предыдущем случае, и его корни равны (кратности 2) и 5 (кратности 1).

Но, когда мы ищем собственные вектора, отвечающие собственному числу 1 нас получается матрица ранга 1, следовательно, пространство решений равно 2:

А + Е =, следовательно, мы можем взять *е*1=, *е*2=.

Решая систему, соответствующую собственному числу 5, находим третий собственный вектор, линейно независимый с ранее найденными:

А 5Е =, то есть *е*3=.

Итак, мы получили базис из собственных вектоов данного оператора.